



Lösungen zu Übungszettel 6 — Vollständige Induktion

1. (a) Beweisen Sie mit vollständiger Induktion:

Die Summe der ersten $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ungeraden Zahlen ist n^2 , d.h. $\sum_{i=1}^n (2i - 1) = n^2$

Beweis (mit vollständiger Induktion):

Induktionsanfang (IA): Für $n = 1$:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^1 (2i - 1) &= 1^2 \\ 2 \cdot 1 - 1 &= 1 \\ 1 &= 1\end{aligned}$$

Induktionsvoraussetzung (IV):

Die Behauptung gelte für ein beliebiges aber festes $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Induktionsschritt (IS): $n \rightsquigarrow n + 1$:

$$\text{z. z.: } \sum_{i=1}^{n+1} (2i - 1) \stackrel{!}{=} (n + 1)^2$$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n+1} (2i - 1) &= \left[\sum_{i=1}^n (2i - 1) \right] + 2(n + 1) - 1 \\ &\stackrel{\text{IV}}{=} n^2 + 2(n + 1) - 1 \\ &= n^2 + 2n + 1 \\ &= (n + 1)^2\end{aligned}$$

2. Beweisen Sie mit vollständiger Induktion für $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$:

$$\sum_{i=1}^n i^3 = \frac{n^2(n + 1)^2}{4}$$

Induktionsanfang (IA): Für $n = 1$:

$$\sum_{i=1}^1 i^3 = 1^3 = 1 = \frac{1 \cdot 4}{4} = \frac{1^2(1 + 1)^2}{4}$$

Induktionsvoraussetzung (IV):

Die Behauptung gelte für ein beliebiges aber festes $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.



Induktionsschritt (IS): $n \rightsquigarrow n + 1$:

$$\frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} = \sum_{i=1}^{n+1} i^3 \quad (1)$$

$$= \left[\sum_{i=1}^n i^3 \right] + (n+1)^3 \quad (2)$$

$$\stackrel{\text{IV}}{=} \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 \quad (3)$$

$$= \frac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^3}{4} \quad (4)$$

$$= \frac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)(n+1)^2}{4} \quad (5)$$

$$= \frac{(n+1)^2 \cdot (n^2 + 4(n+1))}{4} \quad (6)$$

$$= \frac{(n+1)^2 \cdot (n^2 + 4n + 4)}{4} \quad (7)$$

$$= \frac{(n+1)^2 \cdot (n+2)^2}{4} \quad (8)$$

3. Beweisen Sie mit vollständiger Induktion für $n \in \mathbb{N}$ ist

$$n^3 + 5n$$

durch 6 teilbar

Induktionsanfang (IA): Für $n = 0$:

$$6 \mid (0^3 + 5 \cdot 0) \quad (9)$$

$$\Leftrightarrow 6 \mid 0 \checkmark \quad (10)$$

Induktionsvoraussetzung (IV):

Die Behauptung gelte für ein beliebiges aber festes $n \in \mathbb{N}$.

Induktionsschritt (IS): $n \rightsquigarrow n + 1$:

$$(n+1)^3 + 5(n+1) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 5n + 5 \quad (11)$$

$$= (n^3 + 5n) + 3(n^2 + n) + 6 \quad (12)$$

$$(13)$$

Der erste Summand ist nach Induktionsvoraussetzung durch 6 teilbar, der letzte ist offensichtlich durch 6 teilbar.

Uns interessiert jetzt also nur noch, ob $3(n^2 + n)$ durch 6 teilbar ist. Auf dem ÜB "Beweismethoden" haben wir gezeigt, dass $n^2 + n$ stets gerade ist. Demnach ist auch $3(n^2 + n)$ und damit der gesamte Ausdruck durch 6 teilbar.