# Lösungen zu Übungszettel 8 — Grundlagen der Linearen Algebra

1. Berechne die folgenden Summen:

   (a)
$$\begin{pmatrix} -6 & 5 \\ 2 & -14 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -9 \\ 7 & 26 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 9 & 12 \end{pmatrix}$$

   (b)
$$\begin{pmatrix} 4 & -9 \\ 7 & 26 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 & 5 \\ 2 & -14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 9 & 12 \end{pmatrix}$$

   (c)
$$\begin{pmatrix} 13 & -29 & 7 \\ -11 & 3 & 17 \\ 19 & 23 & -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & -6 \\ 7 & 8 & -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & -27 & 10 \\ -7 & 8 & 11 \\ 26 & 31 & -14 \end{pmatrix}$$

2. Berechne die folgenden Produkte. Gib jeweils die Größe der resultierenden Matrix an.

   (a)
$$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 & 43 \\ 17 & 31 \end{pmatrix} \quad 2 \times 2$$

   (b)
$$\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 33 & 23 \\ 31 & 22 \end{pmatrix} \quad 2 \times 2$$

   (c)
$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 9 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 18 \\ 38 & 13 \end{pmatrix} \quad 2 \times 2$$

   (d)
$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 9 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & 22 & 4 \\ 21 & 9 & 1 \\ 54 & 25 & 3 \end{pmatrix} \quad 3 \times 3$$

3. Was fällt dir bei den beiden bisherigen Aufgaben auf? Insbesondere bei den Aufgabenteilen a) und b) der ersten beiden Aufgaben?
   Es soll auffallen, dass die Addition von Matrizen kommutativ ist, während die Multiplikation nicht kommutativ ist.

4. Bestimme, falls möglich, jeweils die inverse Matrix zu der gegebenen.

   (a)
$$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$$

   (b)
$$\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \text{Es existiert keine Inverse}$$

(c)

$$\begin{pmatrix} -6 & 5 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -\frac{3}{23} & \frac{5}{46} \\ \frac{1}{23} & \frac{3}{23} \end{pmatrix}$$

(d)

$$\begin{pmatrix} 9 & 9 & 3 \\ 3 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -\frac{5}{3} \\ -1 & 1 & 2 \\ \frac{1}{3} & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

5. Löse die folgenden Gleichungssysteme mithilfe von Matrizen.

(a)

$$\begin{aligned} 3x + 2y &= 20 \\ 9x - 3y &= -3 \end{aligned}$$

$\rightsquigarrow x = 2,\ y = 7$

(b)

$$\begin{aligned} 2x + 3y - z &= 1 \\ x + 3y + z &= 2 \\ -2x - 2y + 4z &= 4 \end{aligned}$$

$\rightsquigarrow x = 3,\ y = -1,\ z = 2$

6. Gib die Anzahl der Lösungen der folgenden Gleichungen an.

(a)

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 & 2 \\ 6 & 12 & 9 \\ -3 & -11 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

(b)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

(a)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 7 & 2 & 1 \\ 6 & 12 & 9 & 0 \\ -3 & -11 & 8 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_1 \to \frac{1}{3} \cdot Z_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{7}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 6 & 12 & 9 & 0 \\ -3 & -11 & 8 & 6 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_2 \to Z_2 - 6 \cdot Z_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{7}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & -2 & 5 & -2 \\ -3 & -11 & 8 & 6 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_3 \to Z_3 + 3 \cdot Z_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{7}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & -2 & 5 & -2 \\ 0 & -4 & 10 & 7 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_3 \to Z_3 - 2 \cdot Z_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{7}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & -2 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 11 \end{array}\right)$$

Somit müsste $0x + 0y + 0z = 11$ gelten, aber das funktioniert nicht.
Also hat die Gleichung keine Lösung.

(b)

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_2 \to Z_2 - 2 \cdot Z_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Somit ergibt sich die Gleichung:

$$x + 2 \cdot y = 3 \Rightarrow y = \frac{3-x}{2}$$

Die Lösungen der Gleichung sind folglich alle Punkte dieser Geraden.
Also hat die Gleichung unendlich viele Lösungen.

7. Beweise: Eine beliebige $2 \times 2$-Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ist invertierbar, falls $ad - bc \neq 0$.

   Gib in diesem Fall die inverse Matrix an.

   **Hinweis:** Die Fallunterscheidung $a \neq 0$ und $a = 0$ kann helfen.

Sei $ad - bc \neq 0$. Wir machen eine Fallunterscheidung. Sei zunächst $a \neq 0$. Wir wenden den Gauß-Algorithmus an:

$$\begin{aligned}
\left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array}\right) &\xrightarrow{Z_2 \to Z_2 - \frac{c}{a} \cdot Z_1} \left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ 0 & \frac{da-bc}{a} & -\frac{c}{a} & 1 \end{array}\right) \\
&\xrightarrow{Z_2 \to \frac{a}{ad-bc} \cdot Z_2} \left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{array}\right) \\
&\xrightarrow{Z_1 \to Z_1 - b \cdot Z_2} \left(\begin{array}{cc|cc} a & 0 & \frac{ad}{ad-bc} & \frac{-ab}{ad-bc} \\ 0 & 1 & \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{array}\right) \\
&\xrightarrow{Z_1 \to \frac{1}{a} \cdot Z_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ 0 & 1 & \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{array}\right) .
\end{aligned}$$

Folglich ist die Matrix invertierbar und es gilt:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} .$$

Falls $a = 0$ (diese Fallunterscheidung ist notwendig, da sonst oben durch Null geteilt wird), vertausche am Anfang der Umformungen die erste und zweite Zeile und gehe analog vor:

$$\begin{pmatrix} 0 & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{bc} \begin{pmatrix} -d & b \\ c & 0 \end{pmatrix} .$$

Allgemein gilt unabhängig vom Wert für $a$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} .$$